○ Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati <u>e diverso docente</u> e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.

Chi si ritira, consegna <u>**solo**</u> questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale. In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale. Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_\mu$ (R) $*$ Qual è il quinto numero primo?

RISULTATO

$$\boxed{11}$$

(I numeri primi sono 2, 3, 5, 7, 11...).

ESERCIZIO 0b$_\mu$ (R) $*$ $D(\cos x + 1)$

RISULTATO

$$\boxed{-\sin x}$$

(La derivata del cos è il −sin, la derivata delle costanti è 0, la derivata della somma è la somma delle derivate).

ESERCIZIO 0c$_\mu$ (R) $*$ Completare la parola mancante: "In Statistica molto usate sono le tavole dei ... di Student"

RISULTATO

$$\boxed{\text{quantili}}$$

(Si tratta dei quantili di Student, analoghi ai quantili del chi quadrato, ai quantili normali, e altri).

ESERCIZIO 1$_\mu$ $*$
Consideriamo il modello di un fenomeno, e per fissare le idee diciamo che è un'epidemia. (Anche se quello che considereremo non è il miglior modello proprio per le epidemie). Il numero di morti dell"epidemia sia modellizzato da

$$x_n = \left\lfloor \frac{20\,n^2}{n\,!} \right\rfloor \qquad n = 1, 2, ...$$

essendo n il numero di giorni dall'inizio ed indicando il simbolo $\lfloor ... \rfloor$ la parte intera (quella che "toglie i decimali" ai numeri positivi, per esempio $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$). Fare un istogramma a barre fino all'ultimo giorno con morti (o per meglio dire fino al giorno precedente del primo giorno con 0 morti).

SVOLGIMENTO
Viene lo standard del punto decimale. (Nello svolgimento e già nel testo del quesito, in cui si trova il numero 3.14).

$$x_1 = \left\lfloor \frac{20 \cdot 1 \cdot 1}{1} \right\rfloor = 20$$

$$x_2 = \left\lfloor \frac{20 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2} \right\rfloor = 40$$

$$x_3 = \left\lfloor \frac{20 \cdot 3 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\rfloor = 30$$

$$x_4 = \left\lfloor \frac{20 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{40}{3} \right\rfloor = \lfloor 13.33... \rfloor = 13$$

$$x_5 = \left\lfloor \frac{20 \cdot 5 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{24} \right\rfloor = \lfloor 4.16... \rfloor = 4$$

$$x_6 = \left\lfloor \frac{20 \cdot 6 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \right\rfloor = 1$$

$$x_7 = \left\lfloor \frac{20 \cdot 7 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{140}{720} \right\rfloor = \lfloor 0.19... \rfloor = 0$$

e abbiamo raggiunto lo 0 previsto. Il numero di morti x_n calcolato dal modello poi non si risolleva da 0 com'è dimostrabile con passaggi facili però laboriosi, ma questa osservazione non ci serve perchè nel testo è detto di fermarsi al giorno precedente del primo giorno con 0 morti, che è il giorno numero 7, come abbiamo trovato. Allora l'epidemia dura 6 giorni, e possiamo produrre l'istogramma a barre.

```
1 .................... 20
2 ........................................ 40
3 .............................. 30
4 ............. 13
5 .... 4
6 . 1
```

(Che molto meglio sarà rappresentare con le aste disposte verticalmente).

ESERCIZIO 2$_\mu$ $*$

Risolvere

$$x^3 + x^2 - 2\,x = 0$$

SVOLGIMENTO

Raccogliamo x

$$\left(x^2 + x - 2\right) x = 0$$

e per la legge di annullamento del prodotto

$$x^2 + x - 2 \quad \vee \quad x = 0$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$$

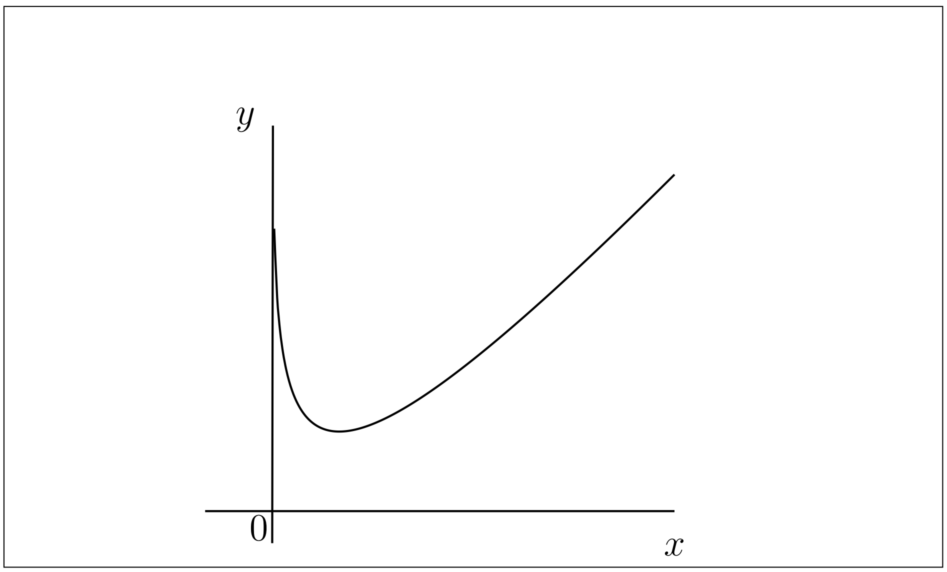
e in conclusione, ricordandosi della possibilità $x = 0$ prima individuata,

$$\boxed{x_1 = -2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0}$$

(E forse qualcuno preferirà denominare $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, in ordine crescente, ma non è necessario).

ESERCIZIO 3$_\mu$ $\star$
Trovare

$$\min\,(2\,x - \ln x)$$



SVOLGIMENTO
Diciamo $f(x)$ la funzione di cui si chiede il minimo.

Deve essere

$$x > 0$$

(perchè x è argomento di un logaritmo).

Deriviamo e scriviamo la disequazione $f'(x) > 0$:

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x} > 0 \qquad \Big/ \cdot x > 0$$

$$2\,x - 1 > 0 \qquad \Big/ + 1$$

$$2\,x > 1 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{2} > 0$$

cioè
$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > \frac{1}{2}$$
allora $f(x)$ decresce (nel suo dominio, $x > 0$) per $x < \frac{1}{2}$ e cresce per $x > \frac{1}{2}$, e allora $x = \frac{1}{2}$ è unico punto di minimo relativo e assoluto. Calcoliamo là $f(x)$, che è il minimo cercato
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} =$$
$$\boxed{1 - \ln\tfrac{1}{2}}$$
o anche, per la proprietà del logaritmo del reciproco,
$$\boxed{1 + \ln 2}$$
(Che numericamente vale ≈ 1.693, scritto con lo standard del punto decimale, ovvero $\approx 1{,}693$, scritto con lo standard della virgola decimale).

Per vedere un disegno del grafico della funzione: `LINK->` a WolframAlfa.

ESERCIZIO 4$_\mu$ %

Che probabilità c'è che i primi 3 bambini che nasceranno da domani in questa città abbiano lo stesso genere? (Ovviamente supponendo in via semplificata sempre 50% la probabilità del genere maschile e del genere femminile, e supponendo l'indipendenza degli eventi).

SVOLGIMENTO

Si userà lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Ci sono 2^3 ovvero 8 casi equiprobabili, che con ovvia simbologia possiamo scrivere

`FFF` stesso genere
`FFM`
`FMF`
`FMM`
`MFF`
`MFM`
`MMF`

`MMM` stesso genere
avendosi 2 casi favorevoli (all'evento considerato) sugli 8 possibili (equiprobabili) e allora

$$p = \frac{\#\text{casi favorevoli}}{\#\text{casi possibili equiprobabili}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25 =$$

$$\boxed{25\%}$$

OPPURE

$$P(\text{il secondo e terzo nato hanno lo stesso genere del primo}) =$$

$$P(\text{il secondo nato ha lo stesso genere del primo} \wedge$$
$$\text{il terzo nato ha lo stesso genere del primo}) =$$

per l'indipendenza

$$= P(\text{il secondo nato ha lo stesso genere del primo}) \cdot$$
$$P(\text{ il terzo nato ha lo stesso genere del primo}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

e si conclude come prima.

ESERCIZIO 5$_\mu$ $\star$
Dopo aver eliminato un outlier stimare con lo stimatore dei momenti il parametro n della variabile aleatoria discreta $\mathbb{U}\{0, n\}$ dal campione aleatorio
71 137 999 35 67 71

SVOLGIMENTO
Si userà lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Riconosciuto ed eliminato l'outlier 999, abbiamo il dataset di 5 elementi

$$X : 71,\ 137,\ 35,\ 67,\ 71$$

(in cui un dato si presenta ripetuto 2 volte il che non fa alcun problema) con media campionaria

$$\bar{X}_5 = 76.2$$

che duplicata (in base alla nota formula $\hat{n} = 2\,\bar{X}_n$) dà il carcato valore dello stimatore $\hat{n}$ di n, che ci guardiamo bene dall'approssimare all'intero, ciò che farebbe perdere informazione:

$$\boxed{152.4}$$

(Se non ci veniva detto della presenza di un outlier non potevamo essere certi che fosse bene considerare 999 un outlier: era solo possibile e ragionevole).