

◦ Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati e diverso docente e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.

Chi si ritira, consegna solo questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda

* è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

\approx è richiesta una ragionevole approssimazione.

% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

(R) è richiesto solo il risultato.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.

In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.

Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

**ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici –
chi non risolve almeno 2 non passa l'esame –
per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.**

ESERCIZIO 0a_μ (R) * Calcolare il fattoriale di 5.

120

$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)$.

ESERCIZIO 0b_μ (R) * Qual è il minimo della funzione $|x|$?

0

(È una funzione ≥ 0 che vale 0 in 0 e allora 0 è il minimo).

ESERCIZIO 0 _{μ} (R) % Qual è la probabilità che 3 lanci di dado non diano mai risultato pari?

12,5%

(Danno sempre dispari, e la probabilità di un risultato dispari è $\frac{1}{2}$, da cui con la probabilità composta per eventi indipendenti, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$).

ESERCIZIO 1 _{μ} %

Di una compressa l'80% è eccipiente. Della parte restante l'85% è il principio attivo. Il resto è colorante. Qual è la percentuale del colorante contenuto nella compressa?

SVOLGIMENTO

Di 100 parti della compressa 80 sono eccipiente. Delle restanti 20 parti, sono principio attivo l'85% cioè 17 parti:

$$20 \cdot 85\% = 17$$

Delle 100 parti iniziali, tolte 80 parti di eccipiente e 17 di principio attivo, restano 3 parti di colorante, che sulle 100 iniziali sono il

3%

ESERCIZIO 2 _{μ} *

Il numero di nuovi casi di covid-19 in Italia, in migliaia, sia modellizzato semplicemente da

$$x_t := 0.06 t^2 - 2.2 t + 36.5$$

per i giorni del 2022 dal 16 maggio ($t = 0$) al 30 giugno ($t = 45$). Supponendo che il modello continuasse a valere anche nei giorni successivi, in che data si sarebbero raggiunti i 97 000 casi?

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale (già nel testo del quesito).

Abbiamo l'equazione $x_t = 97$ ovvero l'equazione di secondo grado

$$\begin{aligned}
 0.06t^2 - 2.2t + 36.5 &= 97 \quad / -97 \\
 0.06t^2 - 2.2t - 60.5 &= 0 \\
 t_{1,2} &= \frac{2.2 \pm \sqrt{2.2^2 - 4 \cdot 0.06 \cdot (-60.5)}}{2 \cdot 0.06} = \\
 &= \frac{2.2 \pm \sqrt{19.36}}{0.12} = \\
 &= \frac{2.2 \pm 4.4}{0.12}
 \end{aligned}$$

escludendo la soluzione negativa ($t > 45$ perchè si considerano tempi successivi al giorno 45)

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{2.2 + 4.4}{0.12} = \\
 &= \frac{6.6}{0.12} = \\
 &= 55
 \end{aligned}$$

e il giorno 55 nel modello considerato è 10 giorni dopo il 30 giugno (giorno 45) e allora è il

10 luglio

(In effetti poi al 10 luglio 2022 si ebbe la media mobile a 7 giorni di 95 804 casi: l'*estrapolazione* x_{55} in questo caso funziona abbastanza bene; i casi effettivamente conteggiati furono invece 81 563, ma era domenica).

ESERCIZIO 3 _{μ} *

Determinare col metodo delle derivate il punto di minimo della funzione $\ln^2 x$.

SVOLGIMENTO

Prima di tutto deve essere

$$x > 0 \quad (1)$$

perchè argomento del logaritmo.

Cercheremo la derivata della funzione $f(x) := \ln^2 x$ e risolveremo la disequazione $f'(x) > 0$.

Ci servirà in ogni caso la nota formula $D \ln x = \frac{1}{x}$.

Se ci ricordiamo la formula di derivazione della funzione composta

4

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o anche solo il caso particolare

$$D f^\alpha = \alpha f^{\alpha-1} \cdot f'$$

si ha subito

$$\begin{aligned} D \ln^2 x &= 2 \ln^1 x \cdot D \ln x = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \frac{2 \ln x}{x} \quad (2) \end{aligned}$$

Se invece non ci ricordiamo nessuna di quelle 2 formule calcoliamo

$$D \ln^2 x = D(\ln x \cdot \ln x) =$$

con la derivata del prodotto

$$= \frac{1}{x} \ln x + \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

riottenendo la (2).

Allora abbiamo la disequazione

$$\frac{2 \ln x}{x} > 0 \quad / \cdot x > 0 \quad \text{nel dominio, vedi (1)}$$

$$2 \ln x > 0 \quad / : 2 > 0$$

$$\ln x > 0 \quad / \exp$$

$$x > 1$$

allora la funzione nel dominio è crescente per $x > 1$ e decrescente per $x < 1$ e allora $x = 1$ è (l'unico) punto di minimo (assoluto) cercato:

$$\boxed{1}$$

ESERCIZIO 4_μ % Viene condotto su 400 persone un test screening, e poi un'indagine diagnostica più approfondita, ottenendo questi risultati:

	MALATI	SANI
POSITIVI	116	15
NEGATIVI	30	239

Calcolare la specificità del test.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Ricordando la definizione della specificità

$$Sp := \frac{\text{veri negativi}}{\text{totale sani}} = \frac{V_-}{V_- + F_+} =$$

coi dati del quesito

$$= \frac{239}{239 + 15} = \frac{239}{254} \approx 0,9409$$

e con ragionevole approssimazione

$$\approx 0,94$$

e in percentuale come richiesto

$$\approx 94\%$$

ESERCIZIO 5 $\mu \approx$

Consideriamo il dataset

$$8,4 \cdot 10^6 \quad 0,87 \cdot 10^6 \quad 10 \cdot 10^6 \quad 38 \cdot 10^6 \quad 1,8 \cdot 10^6$$

Calcolare lo stimatore non distorto della media, con 2 cifre significative.

(Il dataset corrisponde più o meno alle quantità di italiani con rispettivamente 0 dosi di vaccino per la prevenzione del contagio da covid-19, e qua ci sono bambini ora non vaccinabili e persone vaccinabili non vaccinate, poi con solo 1 dose, con solo 2 dosi, con solo 3 dosi, con 4 dosi, ma non ce ne occupiamo assolutamente, lo prendiamo semplicemente come dataset).

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale (già nel testo del quesito). Media degli $n = 5$ valori del dataset:

$$\begin{aligned} \bar{X}_5 &= \frac{8,4 \cdot 10^6 + 0,87 \cdot 10^6 + 10 \cdot 10^6 + 38 \cdot 10^6 + 1,8 \cdot 10^6}{5} = \\ &= \frac{8,4 + 0,87 + 10 + 38 + 1,8}{5} \cdot 10^6 \approx 11,8 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

e con 2 cifre significative

$$12 \cdot 10^6$$