Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$\%$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2025}$ (R) $*$ Qual è la funzione goniometrica ovvero trigonometrica più classicamente associata a $\sin x$?

$$\boxed{\cos x}$$

(I legami fra sin e cos sono molteplici: in particolare la derivata di sin è cos. Vale inoltre l'Identità Goniometrica Fondamentale:

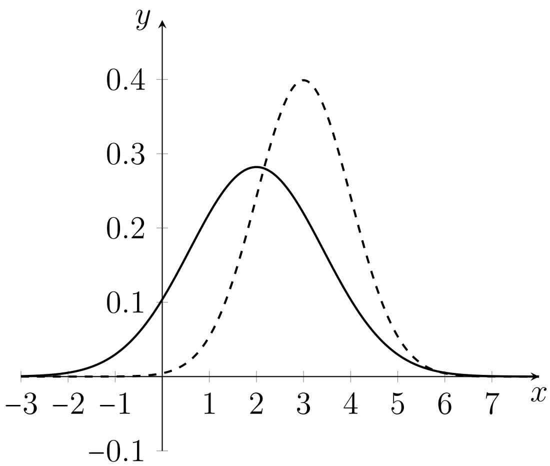
$$\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$$

I grafici di seno e coseno si ottengono uno dall'altro con una traslazione:

$$\sin(x) \equiv \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Infinite altre formule collegano il seno e il coseno, fra cui la formula di duplicazione del seno. D'altra parte il nome stesso del coseno è costruito per indicare che è associato al seno, come nelle parole *cooperazione*, *collaboratore*, *coautore*).

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2025}$ (R) $\ast$ Tratteggiato o continuo? Dire quale dei 2 grafici rappresenta la densità di una variabile aleatoria normale con minore varianza.



$$\boxed{\text{tratteggiato}}$$

(La campana più stretta – e allora più alta trattandosi di variabili aleatorie normali – corrisponde a minore varianza, e cioè a valori tendenzialmente più addensati intorno alla media).

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2025}$ (R) $\ast$ Quale di questi p-value è da considerarsi in generale preferibile? 10^{-1}, 10^{-3}, $5 \cdot 10^{-3}$, $3 \cdot 10^{-2}$.

$$\boxed{10^{-3}}$$

(Cioè il più piccolo).

ESERCIZIO 1$_{\mu 2025}$ $\approx$ Risolvere l'equazione $\lg(-x) + \lg(x+1) + 1 = 0$.
Non ci si occupi del dominio della funzione al primo membro, che comunque è $-1 < x < 0$ come si potrebbe facilmente trovare, e che in questo caso risulterebbe sostanzialmente ininfluente, perché le soluzioni che si troveranno (operando ragionevolmente) appartengono effettivamente a quel dominio.

SVOLGIMENTO

L'equazione

$$\lg(-x) + \lg(x+1) = -1$$

per una proprietà dei logaritmi diventa

$$\lg\left(-x \cdot (x+1)\right) = -1$$

$$\lg\left(-x^2 - x\right) = -1$$

$$\Big/ 10^{\wedge}$$

$$-x^2 - x = 10^{-1}$$

$$-x^2 - x - \frac{1}{10} = 0$$

(e si potrebbero moltiplicare ambo i membri per -1 con modesto vantaggio, o addirittura per -10, un po' meglio, avendosi da risolvere $10\,x^2 + 10\,x + 1 = 0$)

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) =$$

$$= 1 - \frac{4}{10} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{5-2}{5} =$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{3}{5}}}{2 \cdot (-1)} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{\frac{3}{5}}}{-2} \approx$$

$$\approx \frac{1 \pm 0.7746}{-2}$$

da cui in definitiva le 2 soluzioni

$$\boxed{\approx -0.8873, \quad \approx -0.1127}$$

o anche, con minore precisione,

$$\boxed{\approx -0.887, \quad \approx -0.113}$$

(Che effettivamente stanno in $]-1,0[$, come preavvertito nel quesito).
Nota. Il dominio della funzione a primo membro si può trovare come segue. Deve essere $-x$ positivo cioè x negativo, e $x+1$ positivo cioè $x>-1$, e allora in definitiva il dominio è

$$\underline{-1<x<0}$$

(Come ci è stato detto nel testo del quesito).

ESERCIZIO 2$_{\mu 2025}$ ≈ Facendo attenzione a usare la formula della varianza della Statistica Descrittiva (e non lo stimatore della varianza usato in Statistica Inferenziale) calcolare la deviazione standard del dataset costituito dai 3 numeri che seguono 34 nella successione di Fibonacci.

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Si potrebbe anche usare lo standard del punto decimale, a scelta).

La successione di Fibonacci viene fatta iniziare da alcuni Autori con 0 e 1 e da altri con 1 e 1, ma questo è ora irrilevante:

(0) 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144...

e allora i 3 valori (che seguono 34) sono

55 89 144

e questo è il dataset di cui dobbiamo calcolare la varianza (della Statistica Descrittiva, non ci sono variabili aleatorie) da cui poi la deviazione standard.

Con l'usuale formula della media di un dataset $x_1,...,x_n$

$$\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

ora con $n=3$ e i valori del dataset si ha

$$\bar{x} := \frac{1}{3}(55+89+144) =$$

$$= \frac{288}{3} = 96$$

e con l'usuale formula della varianza della Statistica Descrittiva

$$Var(x_1,...,x_n) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$$

ora con $n = 3$ e i valori del dataset si ha

$$Var(X) = \frac{1}{3}\left((55-96)^2 + (89-96)^2 + (144-96)^2\right) =$$

Questo è il valore esatto della varianza, seppure malamente espresso (ma è già qualcosa).
Ora lo esprimeremo meglio continuando il calcolo:

$$= \frac{1}{3}\left(41^2 + 7^2 + 48^2\right) =$$

$$= \frac{1681 + 49 + 2304}{3} =$$

$$= \frac{4034}{3} \approx 1344.7$$

e con la radice quadrata otteniamo la deviazione standard SD ovvero sd

$$\boxed{\approx 36.67}$$

o piuttosto, con minor precisione, d'altra parte un po' vacua con un dataset di soli 3 elementi,

$$\boxed{\approx 36.7}$$

e addirittura, in applicazioni pratiche e considerando l'esiguità del dataset,

$$\boxed{\approx 37}$$

ESERCIZIO 3$_{\mu 2025}$ *

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 0.\bar{3}^n$$

SVOLGIMENTO
Viene usato lo standard del punto decimale.

È una serie geometrica

$$a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a\,r^n$$

di ragione $r = 0.\bar{3}$ che è un numero fra 0 e 1 esclusi

$$0 < r < 1$$

(o, più in generale e con le stesse conseguenze, $-1 < r < 1$) con $a = 1$ e allora è convergente con somma

$$\frac{a}{1-r} =$$

$$= \frac{1}{1-0.\bar{3}} =$$

che è il cercato risultato esatto, molto malamente espresso. (Ma è già qualcosa).
Ora ricordiamo che $0.\bar{3}$ ovvero 0.3333... è $\frac{1}{3}$ e continuiamo

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}} =$$

$$\boxed{\frac{3}{2}}$$

ovvero meglio, visto che il quesito è espresso con la scrittura decimale e non quella frazionaria,

$$\boxed{1.5}$$

ESERCIZIO 4$_{\mu 2025}$ $\star$ Supponiamo che finora si abbiano questi dati relativamente a due (fittizie) malattie sviluppatesi nel 2025 rispettivamente nella Repubblica del Congo (abitanti: ca 6.2 milioni) e nella Repubblica Democratica del Congo (abitanti: ca 111 milioni): il morbo di Bloggs e il morbo di Doe.

	morbo di Bloggs	morbo di Doe
casi	6486	1021
morti	644	174

Quale ha letalità maggiore?

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale. (Nel dato 6.2 milioni).

La letalità è, salvo una varietà di possibili precisazioni, sostanzialmente la probabilità di morire in caso di malattia.
Ovviamente questa probabilità andrà valutata in senso frequentista, in pratica contando i *casi* e i morti.

Letalità del morbo di Bloggs = $\frac{644}{6486} \approx 0.0993 \approx 10\%$

Letalità del morbo di Doe = $\frac{174}{1021} \approx 0.1704 \approx 17\%$

Allora risulta avere maggiore letalità

$$\boxed{\text{il morbo di Doe}}$$

ESERCIZIO. 5$_{\mu 2025}$ $\star$ **Si motivi dettagliatamente la risposta.**
Si supponga che per un test statistico relativo a un'epidemia in corso in uno stato non aderente all'OMS (Organizzazione Mondiale della Sanità), con ipotesi nulla H_0 e alternativa A vera, al consueto livello della significatività statistica la regione critica sia definita da $T > 463$ e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test, con questo dataset

238,033 158,934 1,003,540 895,441 763,608 970,888 1,099,030

abbia prodotto il valore 289.018. Quale di queste affermazioni è vera?

- Non è possibile rispondere perché non è specificato il test usato
- Non è possibile rispondere perché non si sa se il campione è gaussiano
- Non ha senso applicare test statistici a dati provenienti da Stati non aderenti all'OMS
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il livello di significatività
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il quantile
- Si commette un errore di prima specie
- Si commette un errore di seconda specie
- Era il caso in generale sperato
- Si è sostanzialmente perso tempo

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale. (Perché la virgola è separatore delle migliaia in 1,003,540 e 1,099,030, e allora il punto in 289.018 è punto decimale).

Allora 289.018 è circa 289 (e non circa 289mila).

Questo numero non appartiene alla regione critica ($T > 463$).

Allora non respingiamo l'ipotesi, che è falsa, perché l'alternativa è vera.

Allora *male non respingo ipotesi falsa* e allora

$$\boxed{\text{si commette un errore di seconda specie}}$$